Типове задачи, решавани чрез рекурентни редици и уравнения

доц. д-р Валентин Бакоев,
ВТУ "Св. св. Кирил и Методий"

Съдържание

- Увод
- Мотивация за изучаване на рекурентните редици
- Рекурентни редици и уравнения
- Решаване на рекурентни уравнения
- Типове задачи, решавани чрез рекурентни редици и уравнения
- Заключение

С развитието на информатиката ролята, значението и приложенията на комбинаториката в информатиката непрекъснато нарастват.
Комбинаторните задачи съчетават двете тясно свързани, но и принципно различни направления в комбинаториката:

- изброителна комбинаторика;
- комбинаторни алгоритми.

1. Увод

Редица изброителни задачи се решават трудно, или изобщо не могат да се решат с помощта на познатите термини за вариации, пермутации и комбинации и формулите за тяхното броене. В такива случаи се търсят други начини и техники за това. Такава техника предлагат рекурентните редици (РР) и рекурентните уравнения (РУ). Прилагането им изисква малко повече математически познания и по-специфичен начин на мислене.

Сред най-известните примери за РР са:

- редицата от числа на Фибоначи: $0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots, f_n, \ldots$, където $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$;
- аритметична прогресия: $1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$, сума на членовете й е: $s_n = s_{n-1} + n$, или още $(n+1).n/2$. В общия случай: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, където $a_k = a_{k-1} + d = a_0 + k.d$, а сумата на първите й n члена е: $s_n = s_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_0 + n.d$, или още $s_n = (n+1).a_0 + (n+1).n.d/2$;
- геометрична прогресия: $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, където $b_k = b_{k-1}.q = b_0.q^k$, а сумата на първите й n члена е: $s_n = s_{n-1} + b_0.q^n$, или още $s_n = b_0.(q^{n+1} - 1)/(q - 1)$ при $q \neq 1$.

2. Мотивация за изучаване на рекурентните редици

РР и РУ заемат важно място в информатиката.
Те се използват:

- При изследване и анализ на сложността на алгоритми. Често функцията, която представя времевата сложност на алгоритъм, е рекурентна. Типичен пример са алгоритмите, основани на стратегията „Разделяй и владей“. Класически представители са QuickSort, MergeSort, двоичното търсене и др. Времевата сложност на алгоритъм от вида „Разделяй и владей“ се определя чрез рекурентно уравнение от вида:
  $T(n) = aT(n/b) + D(n) + C(n)$ при $n > c$, където $a \geq 1$, $b > 1$ и $c \geq 1$ са целочислени константи.

2. Мотивация за изучаване на рекурентните редици

- Друго важно приложение на РР и РУ е стратегията „Динамично програмиране". Втората и третата стъпки при разработването на алгоритъм, основан на тази стратегия са:
  - „рекурсивно дефиниране на стойностите на оптималното решение", което на практика означава да намерим рекурентна формула (т.е. РУ) за него;
  - „пресмятане на стойностите на оптималното решение по метода „отдолу-нагоре" (bottom-up approach)", т.е. пресмятане стойността на намерената вече рекурентна формула според определени параметри;

2. Мотивация за изучаване на рекурентните редици

- Връзките между рекурсия от една страна и РР и РР от друга. Когато решаваме РУ чрез рекурсивна функция, сложността е поне линейна (а може и експоненциална, ако не познаваме неефективната рекурсия и не знаем кога и как да я избягваме). Но ако сме намерили решението на даденото РУ, то често се пресмята чрез формула с константна сложност;
- На РР и РУ се отделя все по-голямо внимание във всички съвременни учебници по „Дискретна математика“, „Алгоритми с СД“ и др., издавани в чужбина и у нас;

2. Мотивация за изучаване на рекурентните редици

- Задачите над редици заемат важно място сред задачите по състезателно програмиране. Често тези редици са (или са свързани с) РР и познанията за тях са много полезни в такива случаи. Ще посочим задачи за: търсене на определен елемент в редица (или определяне на негови свойства - делимост, брой цифри, последни цифри и др.), търсене на сума на елементите, броене на елементи с определени свойства, определяне на подредици с определени свойства и т.н.

3. Рекурентни редици и уравнения

Нека за редицата от числа $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$, са известни първите r члена $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ и за всяко $n \geq r$ е в сила:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_r a_{n-r}, \qquad (1)$$

където $c_1, c_2, \ldots, c_r$ са константи. Равенството (1), определящо $n-$тия член на редицата като линейна функция на предхождащите го r члена, наричаме линейно рекурентно уравнение с постоянни коефициенти от ред r. А редицата a, зададена чрез тези условия, наричаме рекурентна редица.

Да решим рекурентно уравнение от типа (1) означава да намерим формула, която да изразява a_n като функция на n и евентулно на първите членове на редицата $a_1, a_2, \ldots, a_r$, наричани още начални условия. Разработен е общ метод за решаване на РУ, но в много случаи може да се прилагат и други, доста по-прости техники и методи, например:

- Метод на заместването (the substitution method). При него се прави догадка за вида на решението, съобразена с началните условия. След това верността на догадката за решение се доказва по индукция. Прилагането на този метод изисква доста познания, съобразителност и опит.

4. Решаване на рекурентни уравнения

Пример 1. Да решим РУ $a_n = a_{n-1} + n - 1$ с начално условие $a_1 = 0$. Това уравнение представя броя на сравненията, извършвани от алгоритъм за сортиране на n елемента по метода на мехурчето (или чрез пряка селекция). Понеже алгоритъмът сравнява всяка двойка елементи, а двойка елементи можем да изберем по $\binom{n}{2}$ начина, предполагаме, че $a_n = \binom{n}{2} = n.(n-1)/2$. Хипотезата е вярна за тривиалните случаи (a_1, a_2, a_3), а верността на й се доказва лесно по индукция.

4. Решаване на рекурентни уравнения

- Метод на итерацията (the iteration method). Същността на метода е в развиване на РУ, стъпка по стъпка. Използва се фактът, че рекурентната зависимост е в сила за всички членове на рекурентната редица от a_r нататък. На първа стъпка членовете на редицата, участващи в израза за a_n се развиват (заместват, разширяват) със съответните им изрази, т.е. с още по-предходни членове на редицата. После тези членове се заместват със съответните им още по-предходни и т.н. докато се достигнат началните условия. Накрая обикновенно се получава сума на членовете на аритметична или на геометрична прогресия.

Пример 2. Да решим РУ $a_n = 2a_{n-1} + 1$ с начално условие $a_1 = 1$. Това уравнение представя броя на преместванията на дискове за решаване на задачата за Ханойските кули с n диска. Развиваме РУ така:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 = 2(2a_{n-2} + 1) + 1 =$$

$$= 2^2 a_{n-2} + 2^1 + 2^0 = 2^2(2a_{n-3} + 1) + 2^1 + 2^0 =$$

$$= 2^3 a_{n-3} + 2^2 + 2^1 + 2^0 = \cdots =$$

$$= 2^{n-1} a_1 + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2^1 + 2^0 =$$

$$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 2^n - 1.$$

4. Решаване на рекурентни уравнения

- Основен метод (the master method) – разработен специално за решаване на на РУ, които представят времевата сложност на алгоритми, подчиняващи се на стратегията „Разделяй и владей“.
- Общ метод – дава решението на РУ от вида (1) в общия случай чрез съответна теорема.

Както забелязахме от разгледаните примери, РУ от първи ред могат се решават лесно чрез методите на заместването и на итерацията. Затова ще конкретизираме твърдението на теоремата за РУ от втори ред.

4. Решаване на рекурентни уравнения

Теорема 1. Нека редицата $a = a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ е зададена чрез линейното РУ от втори ред:

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} = 0 \tag{2}$$

за $n > 2$ и са известни началните условия a_0 и a_1 на редицата. Нека α_1 и α_2 корените на съответното на (2) характеристично уравнение:

$$x^2 + c_1.x + c_2 = 0. \tag{3}$$

4. Решаване на рекурентни уравнения

Тогава решението на линейното РУ (2) е:

- $a_n = d_1.\alpha_1^n + d_2.\alpha_2^n$, ако корените са различни, или
- $a_n = (d_1 + d_2.n).\alpha^n$, ако $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$,

където d_1 и d_2 са неопределени коефициенти, които се определят еднозначно чрез началните условия.

Пример 3. Да решим РУ на редицата от числа на Фибоначи: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ при начални условия $f_0 = 0$ и $f_1 = 1$. Характеристичното уравнение $x^2 + x + 1$ има корени $\alpha_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ и $\alpha_2 = (1 - \sqrt{5})/2$.

Тогава общият вид на решението е:
$f_n = d_1.(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + d_2.(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$.
Заместваме с началните условия:
$f_0 = d_1.1 + d_2.1 = 0$ и
$f_1 = d_1.(1+\sqrt{5})/2 + d_2.(1-\sqrt{5})/2 = 1$.
Решаваме тази система и получаваме:
$d_1 = 1/\sqrt{5}$ и $d_2 = -1/\sqrt{5}$
и следователно

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Отбелязваме, че полученото за f_n решение е известно като формула на Бине, а числото $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ в нея е т. нар. златно сечение.
От формулата на Бине следва, че f_n е най-близкото до $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ цяло число.

4. Решаване на рекурентни уравнения

Рекурентните уравнения от вида (1) и (2) имат нулева дясна част и се наричат хомогенни. Техниката за решаването им е приложима и когато дясната част е различна от нула, а съответните линейни РУ се наричат нехомогенни. Нека

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} = \phi(n), \quad \phi(n) \neq 0. \tag{4}$$

Неговото решение има вида $a_n = a'_n + b_n$, където a'_n е решение на съответното му хомогенно РУ – определяме го съгласно Теорема 1. Тук b_n е частно решение на самото нехомогенно РУ и следователно го удовлетворява.

4. Решаване на рекурентни уравнения

Видът, в който се търси b_n зависи от $\phi(n)$:
а) ако $\phi(n) = k.\alpha^n$ $(k = const, \alpha = const)$, тогава:
(1) $b_n = c.\alpha^n$, ако α не е корен на характеристичното уравнение;
(2) $b_n = c.n.\alpha^n$, ако α е еднократен корен на характеристичното уравнение (т.е. съвпада с единия от двата корена);
(3) $b_n = c.n.(n+1)\alpha^n$, ако характеристичното уравнение има един двукратен корен и α съвпада с него.
Константата c определяме като заместим частното решение b_n в самото нехомогенно РУ (4).

4. Решаване на рекурентни уравнения

b) ако $\phi(n) = Q(n)$, където $Q(n)$ е полином на n от степен q, тогава b_n има вида $b_n = n^m.P(n)$. В него m е кратността на числото 1 като корен на характеристичното уравнение ($m = 0$, ако 1 не е корен), а $P(n)$ е полином на n от степен q с неопределени кефициенти. Те се определят чрез заместване на b_n в нехомогенно РУ (4).
И в двата случая накрая използваме началните условия за определяне на неопределените коефициенти в общото решение на хомогенното РУ.

Пример 4. Да се реши РУ $a_n = a_{n-1} + n^2$ с начално условие $a_1 = 1$ (уравнението представя броя на всички квадрати в квадратна мрежа с размерност n).

Преписваме РУ във вида $a_n - a_{n-1} = n^2$.

Характеристичното уравнение $x - 1 = 0$ има корен $x = 1$ и следователно решението на хомогенното РУ има вида

$a_n^{(h)} = d.1^n, d = const$.

Частното решение търсим във вида

$a_n^{(p)} = n^1.(an^2 + bn + c)$.

4. Решаване на рекурентни уравнения

Заместваме частното решение в самото РУ:

$$an^3 + bn^2 + cn - a(n-1)^3 - b(n-1)^2 - c(n-1) = n^2$$

$$an^3 + bn^2 + cn - an^3 + 3an^2 - 3an + a - bn^2 + 2bn - b - cn + c = n$$

$$3an^2 - 3an + a + 2bn - b + c = n^2$$

Приравняваме коефициентите пред еднаквите степени на n от двете страни на последното равенство и получаваме:

$$3a = 1 \Rightarrow a = 1/3;$$

$$-3a + 2b = 0 \Rightarrow -1 + 2b = 0 \ \Rightarrow b = 1/2$$

$$a - b + c = 0 \Rightarrow c = b - a = 1/6.$$

Оттук получаваме:
$a_n^{(p)} = n^3/3 + n^2/2 + n/6 = (2n^3 + 3n^2 + n)/6 =$
$= n(n+1)(2n+1)/6.$
Тогава общото решение на нехомогенното РУ е:
$a_n = d + n(n+1)(2n+1)/6.$
Използваме началното условие: $1 = a_1 = d + 1 \ \Rightarrow d = 0$ и следователно
$a_n = n(n+1)(2n+1)/6.$

4. Решаване на рекурентни уравнения

Стъпките при решаване на задачи, изискващи съставяне на РУ и после решаването му, следват следната индуктивна схема:
(1) Означаваме, например с a_n, броя на търсените обекти според параметъра n. В зависимост от стойностите на n, за които задачата има смисъл, разглеждаме съответната редица. Търсим формула за a_n;
(2) Пресмятаме първите няколко члена на редицата, за които задачата има смисъл. Това са началните условия;
(3) Индуктивно предположение – допускаме, че сме намерили (или, че са ни известни) всички членове на редицата до a_{n-1} включително;

4. Решаване на рекурентни уравнения

(4) Изразяваме a_n линейно чрез предходните членове на редицата и доказваме рекурентната връзка.
На тази стъпка често разсъжденията ни са от вида:
„Имаме (разположили сме, начертали сме и т.н.) $n-1$ елемента. Те образуват a_{n-1} обекта от търсените – съгласно индуктивното предположение знаем този брой. Добавяме (разполагаме, начертаваме и т.н.) n-тия елемент. Как се променя (увеличава) броят на обектите, който търсим?“.

Отново подчертаваме, че разсъжденията и изводът на рекурентната връзка трябва да имат доказателствена форма. Проверяваме дали полученото РУ удовлетворява началните условия;
(5) Решаваме полученото на предходната стъпка линейно РУ. За целта рагледаните дотук техники трябва да се владеят и прилагат много добре. Накрая проверяваме полученото решение.

5. Типове задачи, решавани чрез РР и РУ

Класификацията на задачите от всяка една област е важен въпрос, пряко свързан с откриването и използването на общи или сходни методи за тяхното решаване.
Класификацията на задачите, решавани чрез РР и РУ не е лесна, тя може да бъде направена по редица показатели:

- Според реда и вида на РУ, което се получава – вече разгледахме примери за РУ от първи и от втори ред, хомогенни или нехомогенни;

5. Типове задачи, решавани чрез РР и РУ

- Според областта, която касаят. Например: финанси – задачи от тип сложна лихва при депозити и кредити; биология – задачи за нарастване на популации от биологични видове; геометрични задачи, задачи за пресмятане сложност на алгоритми и др.;

Примери.
Задача 1. Банка дава 6% годишна лихва за депозит, като я капитализира на всеки месец. Спас внесъл 1000 лв. на 1 май. Колко ще бъде депозитът му точно след една година? А колко месеца трябва да изминат докато депозитът му се удвои?

Решение. (1) $6\%/12 = 0,5\% = 0,005$ е коефициентът на нарастване на сумата всеки месец. Нека p_n е стойността на депозита в края (т.е. след изтичането) на n-тия месец, $1 \leq n \leq 12$. Имаме $p_n = p_{n-1} + 0,005.p_{n-1} = 1,005.p_{n-1}$, като $p_0 = 1000$. По метода на итерирането получаваме: $p_n = 1,005.p_{n-1} = 1,005.(1,005.p_{n-2}) = (1,005)^2.p_{n-2} = \cdots = (1,005)^n.p_0 = (1,005)^n.1000$.
(2) Използваме решението на (1), но вече изискваме $p_n = 2.p_0 = (1,005)^n.p_0$. Съкращаваме на p_0 и вече търсим решение на уравнението $2 = (1,005)^n$ спрямо n. Отговорът е $\lceil \log_{1.005} 2 \rceil$.

5. Типове задачи, решавани чрез РР и РУ

Подобни задачи:
Задача 2. Приблизителният брой бактерии в една култура е 1000 и се увеличава с 250% на всеки 2 часа. Колко ще бъде броят на бактериите в културата след 1 денонощие?
Задача 3. Да предположим, че през 2010 г. населението на Земята е 6,9 милиарда и броят на хората им нараства с 1,1% годишно. Колко ще бъде населението на Земята през 2030 г.?
Задача 4. Компания наела работник със стартова заплата 50000$. В края на всяка година работникът получава увеличение на заплатата с 5% плюс още 1000$. Колко ще бъде заплатата му след 15 години?

5. Типове задачи, решавани чрез РР и РУ

- Според това, какво се търси – дали определен (n-ти) член на редица, или номер на пореден член на редица според стойността му, или сума на някои (на всички) членове на дадена редица, или броят на всички редици от определен вид;

Към тази група спадат току-що разгледаните задачи, задачите от Примери 1, 2 и 4. Можем да добавим и задачи, свързани с триъгълните, тетраедралните, квадратните, пирамидалните и т.н. числа, известни като „фигурни числа“.

5. Типове задачи, решавани чрез РР и РУ

- според характерни ключови думи в условието, изискващи определен начин на разсъждение, или напомнящи определени РР, РУ, или други, базови задачи;

Например, да няма два съседни елемента с определени свойства (цвят, четност/нечетност, подреждане и др.). Често такива задачи се свеждат до числата на Фибоначи, на Лукас и други подобни.
Задача 5. Колко е броят на всички редици от нули и единици (т.е. двоичните последователности, бит-низовете) с дължина n, които не съдържат 2 съседни нули?

Решение. Да означим с a_n броя на всички такива редици с дължина n. Очевидно, за $n = 0$ задачата няма смисъл, а тривиалните случаи (началните условия) съобразяваме лесно: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$. Допускаме, че сме намерили всички членове на редицата до a_{n-1}, включително. Търсим a_n. Всяка от търсените редици с дължина n завършва или на 1 (тогава можем да я получим по a_{n-1} начина, като в края на всяка такава редица с дължина $n-1$ добавим 1), или на 0 (тогава предпоследният елемент трябва да бъде 1 и те ще завършват на 10 – имаме точно a_{n-2} такива редици). Така получаваме $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ – РУ от числата на Фибоначи, но с други начални условия.

5. Типове задачи, решавани чрез РР и РУ

Задача 6. По колко начина могат да се паркират мотоциклети и миниколи в редица от n места, ако един мотоциклет заема 1 място, а една миникола заема 2 места?
Задача 7. Нека за $n > 0$ означим с a_n броя на начините, по които редица от единици и двойки дава сума n. Да се намери броят на всички такива редици (т.е. a_n).
Задача 8. По колко начина правоъгълна ивица с дължина n метра и ширина 1 метър може да се застели с плочи, всяка с размери 0,5 на 1 метър?
Задача 9. По колко начина може да се изкачи стълба от n стъпала, като се изкачват по едно или по 2 стъпала наведнъж?

5. Типове задачи, решавани чрез РР и РУ

Задача 10. Разглеждаме всевъзможните редици от по n покерни чипа, всеки от които може да бъде червен, бял, син или зелен. Колко от тях не съдържат 2 съседни сини чипа, ако местата на чиповете са номерирани, т.е. симетричните редици считаме за различни?
Задача 11. Колко различни флага могат да се ушият от n ивици, всяка от цветовете бял, червен или зелен, разположени хоризонтално една до друга. Във флаговете не трябва да има две съседни ивици от един и същи цвят, а зелената ивица може да се разполага само между ивици от другите два цвята?

Задача 12. Колко е броят на всички редици с дължина n, образувани от цифрите 0, 1 и 2, които съдържат нечетен брой нули?
Упътване. Редиците, завършващи на 0 се получават от редиците с дължина $n-1$, които съдържат четен брой нули. Техния брой получаваме като от 3^{n-1}, колкото е броят на всички редици с дължина $n-1$, извадим тези, които съдржат нечетен брой нули, т.е. a_{n-1}.

5. Типове задачи, решавани чрез РР и РУ

- Задачи за броене при рекурсивно или индуктивно дефинирани операции над геометрични фигури, при себеподобни фигури.

Задача 13. (Във връзка с Пример 4.) Колко е броят на всички възможни квадрати, образувани от квадратчетата в шахматна дъска (т.е. квадратна мрежа) с размерност n?
Задача 14. Колко е броят на всички възможни квадрати, образувани от квадратчетата в правоъгълна мрежа с размерност $n \times m$?

Задача 15. (Московски държ. олимпиади, отборно, 2005-2006 г., Задача IX-J. Количество треугольников.) Даден е равностранен триъгълник със страна n см. Върху всяка от страните отбелязваме точките, разположени на 1 см. една от друга, започвайки от върховете. През всяка двойка такива точки, разположени на равни разстояния от произволен връх, начертаваме съответната отсечка (тя е успоредна на страната срещу съответния връх). Да се намери броят на всички възможни триъгълници, получени по този начин на фигурата.

5. Типове задачи, решавани чрез РР и РУ

Задача 16. Дадени са n прави в равнината, всеки две от които имат обща точка и няма точка, през която да минават 3 (или повече) прави. Да се намери броят на секторите, на които се разделя равнината чрез тези прави.

6. Заключение

Предложените тук задачи обхващат сравнително малка част от задачите, свързани с РР и РУ, но в замяна, те са едни от най-популярните. Чрез тях акцентирахме на подхода, на начина на разсъждаване, на техниките, които се използват при решаването им. Целта е получаването на по-ефективни решения.
Накрая само ще споменем рекурентните таблици от числа, каквито са триъгълникът на Паскал, на Стирлинг – подобни таблици се получават често в динамично програмиране. Сред РР и РУ има и такива, които не са с постоянни коефициенти – най-известни сред тях са числата на Каталан, на Стирлинг, на Бел и др.

Темата за редици, за смисъла (интерпретацията) на техните членове, за техните свойства и т.н. е много обширна. Най-добрият справочник по темата е „The Online Encyclopedia of Integer Sequences“ (OEIS), www.oeis.org. Към момента в базата данни на OEIS е записана информация за над 216 000 редици и включва тълкувания, коментари, различни възможности за търсене, програмен код, линкове, препратки, възможности за добавяне на данни от потребителите и т.н. Например, редицата числа от Пример 4: 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, . . . е под номер A000330 в OEIS и е представена като „Square pyramidal numbers“.

ВЪПРОСИ?

БЛАГОДАРЯ ЗА ВНИМАНИЕТО!